ZUR THEORIE

DER

LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

AKADEMISCHE ANTRITTSSCHRIFT

VON

Dr. LUDWIG STICKELBERGER,

AUSSERORD. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT ZU FREIBURG I. B.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1881.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550801_0137

Das Verhalten der Integrale einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung in einem Gebiete, in welchem ihre Coefficienten zwar eindeutig bleiben, aber für einen einzelnen Punkt unendlich gross oder unbestimmt werden, ist zuerst von *Riemann*[1]) und Herrn *Fuchs*[2]) untersucht worden. Während sich aber *Riemann* auf den Fall beschränkt, wo die Differentialgleichung, deren Ordnung gleich n sein möge, n solche Integrale besitzt, die sich bei Umkreisung des singulären Punktes mit n verschiedenen constanten Factoren multipliciren, hat Herr *Fuchs* auch den Fall in Betracht gezogen, in welchem die Gleichung, durch die jene Factoren im Allgemeinen bestimmt werden, gleiche Wurzeln besitzt, und hat gezeigt, wie man auch in diesem Falle die Integrale durch eindeutige Functionen, durch Potenzen und Logarithmen ausdrücken kann. Genauer hat dies Herr *Hamburger*[3]) ausgeführt, indem er n particuläre Integrale ermittelt, welche so in Gruppen zerfallen, dass die einer Gruppe angehörenden bei Umkreisung des singulären Punktes in bestimmte einfache Verbindungen ihrer selbst übergehen, und indem er sodann die Integrale jeder Gruppe durch eine gleiche Anzahl eindeutiger Functionen explicite ausdrückt.

In dem ersten Theile diese Arbeit (§ 1—4) werden zunächst im Anschluss an die vollständige Integration eines Systems von Differenzengleichungen irgendwelche n unabhängige Integrale durch n in der Umgebung des singulären Punktes eindeutige Functionen und umgekehrt diese eindeutigen Functionen durch jene Integrale linear ausgedrückt; die entsprechenden Coefficienten der beiden reciproken Substitutionen stehen in einer sehr einfachen Beziehung zu einander. Die vollständige Entwickelung der Substitutionen zeigt sodann, dass es nicht

1) Beiträge zur Theorie der Gauss'schen Reihe (Werke, hgg. von Weber, S. 62); vgl. auch die nachgelassene Abhandlung S. 357.

2) Borchardt's Journal, Bd. 66, S. 121.

3) Borchardt's Journal, Bd. 76, S. 113; vgl. Jürgens, ebenda Bd. 80, S. 150.

sowohl auf die Linearfactoren als auf die Weierstrass'schen Elementartheiler jener Gleichung $n$ten Grades ankommt, worauf bereits Herr *Hamburger*[1]) hingewiesen hat. Aus diesem Grunde scheint es nicht rathsam, der Untersuchung eine Gleichung, die zwischen $n+1$ Zweigen derselben Integralfunction besteht, zu Grunde zu legen, wie Herr *Casorati* in einer eben erschienenen Abhandlung[2]) thut, die auf ähnlichen Betrachtungen wie die vorliegende beruht.

Der zweite Theil der vorliegenden Arbeit bezieht sich auf diejenige specielle Classe von Differentialgleichungen, deren sämmtliche Integrale in der Umgebung eines bestimmten Werthes a der unabhängigen Veränderlichen x sich regulär verhalten, d. h. mit bestimmten Potenzen von $x-a$ multiplicirt endlich bleiben. Es schien mir von Interesse zu sein, die Methode, welche Herr *Fuchs*[3]) zur Untersuchung des Verhaltens der Coefficienten einer solchen Gleichung angewendet hatte, von den ihr anhaftenden Schwierigkeiten zu befreien, welche die Herren *Thomé* und *Frobenius*[4]) veranlasst haben mögen, einen andern Weg einzuschlagen. In der That gelang es anzugeben, wie ein System von n unabhängigen Integralen beschaffen sein muss, damit das Anfangsglied der aus ihnen zu bildenden Determinante mit der Determinante ihrer Anfangsglieder übereinstimme, und zugleich den Werth dieses Anfangsgliedes zu ermitteln. Eine zweimalige Anwendung dieses Resultates giebt auf einen Schlag die Fuchs'schen Bedingungen und die Gleichung, deren Wurzeln die Ordnungszahlen der einzelnen Integrale sind.

§ 1.

Es sei

$$\frac{d_n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0 \tag{1}$$

eine Differentialgleichung, deren Coefficienten $p_1, \ldots p_n$ in der Umgebung des Werthes $x=0$, d. h. für alle Werthe von x, deren Modul unterhalb einer bestimmten Grenze liegt, eindeutig definirt sind und nur für $x=0$ sämmtlich oder zum Theil unendlich gross oder unbestimmt werden. Sind dann $y_1, \ldots y_n$ n linear unabhängige Integrale dieser Differentialgleichung, so werden dieselben, wenn x einen positiven Umlauf um den Nullpunkt macht, wenn also $\log x$ um $2\pi i$

1) A. a. O. S. 124.
2) Annali di mat., ser. II, t. 10, p. 25.
3) A. a. O. S. 139—148.
4) Borchardt's Journal, Bd. 74, S. 200; Bd. 80, S. 325.

wächst, nach Herrn *Fuchs*[1]) in n unabhängige lineare Verbindungen ihrer selbst übergehen. Bequemer lässt sich dies ausdrücken, wenn man nach *Riemann* und Herrn *Hamburger*[2]) geradezu $\log x$ als unabhängige Variable einführt und etwa

$$\log x = 2u\pi i \tag{2}$$

setzt. Die Functionen $y_1, \ldots y_n$ von x verwandeln sich durch diese Substitution in Functionen $f_1(u), \ldots f_n(u)$, welche holomorph, also auch eindeutig sind für alle Werthe von u, deren imaginärer Theil eine gewisse Grenze übersteigt, und die erwähnte Eigenschaft wird durch die Gleichungen

$$f_\alpha(u+1) = \sum_\beta c_{\alpha\beta} f_\beta(u) \qquad (\alpha = 1, \ldots n) \tag{3}$$

ausgedrückt. Die n^2 Grössen $c_{\alpha\beta}$ sind constant, und ihre Determinante ist von Null verschieden. Die Aufgabe, die Functionen $y_1, \ldots y_n$ durch eindeutige und durch einfachere mehrdeutige Functionen von α auszudrücken, ist somit auf die andere zurückgeführt, n eindeutige Functionen von u, welche einem System linearer Differenzengleichungen mit constanten Coefficienten genügen, durch u selbst und durch periodische Functionen von u auszudrücken, d. h. dieses System von Differenzengleichungen allgemein zu integriren[3]). Wir lösen dieselben zunächst nach einer von *Cauchy*[4]) für Differentialgleichungen angewendeten Methode in der Weise, dass $f_1(u), \ldots f_n(u)$ für $u = u_0$ gegebene Werthe annehmen, und leiten sodann aus dieser Lösung die allgemeinste ab.

Bekanntlich erhält man eine particuläre Lösung des obigen Systems, indem man $f_\alpha = a_\alpha c^u$ setzt, vorausgesetzt, dass c und die Verhältnisse der Grössen a_α den Gleichungen

$$ca_\alpha = c_{\alpha 1} a_1 + \ldots + c_{\alpha n} u_n \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

genügen. Nach *Cauchy* kann man allgemeiner

$$f_\alpha(u) = \mathbf{R} \frac{S_\alpha}{S} s^{u-u_0} \tag{4}$$

setzen, wo $S, S_1, \ldots S_n$ ganze Functionen einer neuen Variabeln s bedeuten, und zwar die erste vom Grade n, die andern vom Grade $n-1$, der Buchstabe $\mathbf{R}$ dagegen das Gesammtresiduum des hinter ihm stehenden Ausdruckes bezeichnet, d. h. die Summe der Coefficienten von $(s-c)^{-1}$, bezogen auf alle Wurzeln c der Gleichung $S = 0$. Unter diesen Wurzeln darf keine gleich Null sein, und es ist für jede einzelne der Werth von $\log s$ und damit auch derjenige von

1) A. a. O. S. 182.
2) Borchardt's Journal, Bd. 83, S. 187 ff.
3) Vgl. Casorati a. a. O.
4) Exercices de math. t. II, p. 25.

$s^{u-u_0} = e^{(u-u_0)\log s}$ beliebig, aber ein für alle Mal zu bestimmen. Die Substitution der Werthe (4) in die Gleichungen (3) liefert die Bedingungen:

$$\mathbf{R}\frac{sS_\alpha - \Sigma c_{\alpha\beta}S_\beta}{S}s^{u-u_0} = 0,$$

welchen dann, aber auch nur dann Genüge geschieht, wenn $sS_\alpha - \Sigma c_{\alpha\beta}S_\beta$ für alle Werthe von α durch S theilbar ist. Setzt man daher

$$sS_\alpha - \Sigma c_{\alpha\beta}S_\beta = C_\alpha S, \tag{5}$$

so lehrt die Betrachtung der Grade, dass C_α eine Constante sein muss, deren Bedeutung leicht anzugeben ist. Denn für $u = u_0$ wird zufolge der über die Wurzeln der Gleichung $S = 0$ gemachten Voraussetzung

$$f_\alpha(u_0) = \mathbf{R}\frac{S_\alpha}{S} = \lim_{s=\infty}\frac{sS_\alpha}{S} = C_\alpha. \tag{6}$$

Bezeichnet man daher durch $e_{\alpha\beta}$ eine Grösse, welche den Werth 0 oder 1 hat, je nachdem α und β verschieden oder gleich sind, ferner durch S die Determinante $n$ten Grades

$$S = |se_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta}| \tag{7}$$

und durch $S_{\alpha\beta}$ diejenige Unterdeterminante von S, welche dem Elemente $se_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta}$ adjungirt ist, so erhält man aus den Gleichungen (5), (6)

$$S_\alpha = \sum_\beta f_\beta(u_0)S_{\beta\alpha}.$$

Die Gleichung $S = 0$, die Fundamentalgleichung des Herrn *Fuchs*, ist wirklich vom Grade n, und das Product ihrer Wurzeln hat den Werth $|c_{\alpha\beta}|$, ist also von Null verschieden. Die Functionen

$$f_\alpha(u) = \sum_\beta f_\beta(u_0)\,\mathbf{R}\frac{S_{\beta\alpha}}{S}e^{u-u_0} \tag{8}$$

genügen also wirklich den aufgestellten Bedingungen.

Definiren wir jetzt allgemeiner $y_1, \ldots y_n$ als Functionen der $n+1$ Variabeln $u, \eta_1, \ldots \eta_n$ durch die Gleichungen

$$y_\alpha = \sum_\beta \eta_\beta\,\mathbf{R}\frac{S_{\beta\alpha}}{S}e^u = \sum_\beta g_{\alpha\beta}(u)\eta_\beta, \tag{9}$$

so ergeben sich aus dem Vorhergehenden die Grundeigenschaften dieser Functionen, nämlich

$$\sum_\beta c_{\alpha\beta}y_\beta = \sum_\beta g_{\alpha\beta}(u+1)\eta_\beta \tag{10}$$

$$g_{\alpha\beta}(0) = e_{\alpha\beta}. \tag{11}$$

Die Determinante der Coefficienten $g_{\alpha\beta}(u)$ ist ebenso wie ihre Elemente eine holomorphe Function von u und kann nicht identisch verschwinden, da sie für $u = 0$ sich auf $|e_{\alpha\beta}| = 1$ reducirt.

Die allgemeine Integration der Differenzengleichungen (3) gewinnen

wir nun durch Variation der Constanten. Werden nämlich mit den n Functionen f_α ebensoviele Functionen φ_β durch die Gleichungen

$$f_\alpha(u) = \Sigma g_{\alpha\beta}(u - u_0)\varphi_\beta(u) \tag{12}$$

verbunden, so wird

$$f_\alpha(u+1) = \Sigma g_{\alpha\beta}(u-u_0+1)\varphi_\beta(u+1)$$
$$= \Sigma g_{\alpha\beta}(u-u_0+1)(\varphi_\beta(u+1)-\varphi_\beta(u)) + \Sigma g_{\alpha\beta}(u-u_0+1)\varphi_\beta(u),$$

mithin vermöge der Eigenschaften der Functionen $g_{\alpha\beta}$

$$f_\alpha(u+1) - \sum_\beta c_{\alpha\beta} f_\beta(u) = \sum_\beta g_{\alpha\beta}(u-u_0+1)(\varphi_\beta(u+1) - \varphi_\beta(u)). \tag{13}$$

Die Gleichungen (2) werden also durch die Substitution (12) in n unabhängige lineare Verbindungen der Gleichungen

$$\varphi_\beta(u+1) = \varphi_\beta(u) \tag{14}$$

transformirt.

Damit die Functionen f_α den Differenzengleichungen (3) *genügen, ist nothwendig und hinreichend, dass die mit ihnen durch die Gleichungen*

$$f_\alpha(u) = \sum_\beta \varphi_\beta(u)\, \mathbf{R}\frac{S_{\beta\alpha}}{S} e^{u-u_0} = \sum_\beta g_{\alpha\beta}(u-u_0)\,\varphi_\beta(u)$$

verbundenen Functionen φ_β die Periode 1 *besitzen.*

Unter den Functionen f_α können insbesondere jene n Integrale der Differentialgleichung (1) verstanden werden, von welchen wir ausgegangen sind.

Da mir eine Abhandlung von Herrn *Trudi* in Band VII des Battaglini'schen Giornale di matematiche, über welche im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik Bd. 2, S. 163 referirt wird, nicht zugänglich war, kann ich nicht beurtheilen, wie viel von dem Inhalte dieses Paragraphen in der genannten Abhandlung schon enthalten ist.

§ 2.

Auf die Grundeigenschaft der linearen Substitution $G(u)$, d. h. des Systems der Coefficienten $g_{\alpha\beta}(u)$, wird man geführt, indem man ein System von Functionen, welche den Differenzengleichungen (3) § 1 genügen, auf doppelte Art bestimmt. Ist nämlich $u_1 - u_0$ eine ganze Zahl und setzt man

$$f_\alpha(u_1) = \Sigma g_{\alpha\beta}(u_1 - u_0) f_\beta(u_0),$$

so müssen die Functionensysteme

$$\Sigma g_{\alpha\beta}(u-u_0) f_\beta(u_0) \quad \text{und} \quad \Sigma g_{\alpha\beta}(u-u_1) f_\beta(u_1)$$

für alle ganzzahligen Werthe von $u - u_1$ übereinstimmen; denn beide genügen den Differenzengleichungen und reduciren sich für $u = u_1$ auf

$f_\alpha(u_1)$ und sind dadurch für die gedachten Werthe von u vollständig bestimmt. Da aber $f_1(u_0), \ldots f_n(u_0)$ ganz willkürlich sind, so schliessen wir, dass für alle ganzzahligen Werthe von $u_1 - u_0$ und $u - u_1$ die Gleichungen

$$\sum_\lambda g_{\alpha\lambda}(u - u_1) g_{\lambda\beta}(u_1 - u_0) = g_{\alpha\beta}(u - u_0)$$

bestehen. Es entsteht daher die Frage, ob auch allgemein, d. h. für beliebige Werthe von u und v,

$$\sum_\lambda g_{\alpha\lambda}(u) g_{\lambda\beta}(v) = g_{\alpha\beta}(u + v) \tag{1}$$

sei. Die Beantwortung dieser Frage erfordert, dass man die vollständige Definition der Functionen $g_{\alpha\beta}(u)$ benutze, und kann aus dem folgenden Lemma geschöpft werden, welches als Verallgemeinerung eines von *Cauchy* [1]) benutzten anzusehen ist.

Sind $S_{\alpha\beta}$, $T_{\alpha\beta}$ die den Elementen $se_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta}$, $te_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta}$ adjungirten Unterdeterminanten in den Determinanten nten Grades

$$S = |se_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta}|, \qquad T = |te_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta}|,$$

dann ist identisch

$$(s - t) \sum_\lambda S_{\lambda\alpha} T_{\beta\lambda} = ST_{\beta\alpha} - TS_{\beta\alpha}. \tag{2}$$

Denn ordnet man S nach den Elementen der αten Colonne, T nach denen der βten Zeile, so ist nach bekannten Determinantensätzen

$$\sum_\varkappa (se_{\varkappa\lambda} - c_{\varkappa\lambda}) S_{\varkappa\alpha} = e_{\lambda\alpha} S, \qquad \sum_\lambda (te_{\varkappa\lambda} - c_{\varkappa\lambda}) T_{\beta\lambda} = e_{\beta\varkappa} T,$$

d. h.

$$sS_{\lambda\alpha} = \sum_\varkappa c_{\varkappa\lambda} S_{\varkappa\alpha} + e_{\lambda\alpha} S, \qquad tT_{\beta\varkappa} = \sum_\lambda c_{\varkappa\lambda} T_{\beta\lambda} + e_{\beta\varkappa} T. \tag{3}$$

Aus diesen Gleichungen leitet man aber leicht die folgenden ab:

$$s \sum_\lambda S_{\lambda\alpha} T_{\beta\lambda} = \sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa\lambda} S_{\varkappa\alpha} T_{\beta\lambda} + ST_{\beta\alpha}$$

$$t \sum_\varkappa S_{\varkappa\alpha} T_{\beta\varkappa} = \sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa\lambda} S_{\varkappa\alpha} T_{\beta\lambda} + TS_{\beta\alpha},$$

aus denen durch Subtraction die angegebene Relation folgt.

Mit Hülfe dieses Lemmas erhält man zunächst

$$\sum_\lambda g_{\alpha\lambda}(u) g_{\lambda\beta}(v) = \mathbf{R}\,\mathbf{R}\, s^u t^v \sum \frac{S_{\lambda\alpha} T_{\beta\lambda}}{ST}$$

$$= \mathbf{R}\,\mathbf{R}\, \frac{s^u t^v}{t - s} \left(\frac{S_{\beta\alpha}}{S} - \frac{T_{\beta\alpha}}{T} \right).$$

Das Zeichen $\mathbf{R}\,\mathbf{R}$ deutet an, dass sowohl s wie t successive in der Umgebung jeder Wurzel der Gleichung $S = 0$ angenommen werden, dass jedesmal nach steigenden Potenzen von $s - c$ und $t - c'$ ent-

1) Ex. de math. t. IV, p. 143.

wickelt werden soll, und schliesslich die Coefficienten von $(s-c)^{-1}$ $(t-c')^{-1}$ in allen diesen Entwickelungen zu addiren sind. Sind nun c, c' verschieden, so erkennt man leicht, dass in der Entwickelung nach Potenzen von $s-c$ und $t-c'$ negative Potenzen beider Grössen nicht mit einander multiplicirt vorkommen. Um den Fall zu bewältigen, wo $c = c'$ ist, wende man die Zerlegung

$$\frac{s^u t^v}{t-s} = \frac{s^u - t^u}{t-s} t^v + \frac{t^{u+v}}{t-s}$$

an; man erkennt dann wie vorhin, dass nur das zweite Glied rechter Hand zu berücksichtigen ist. Ist ferner $F(s)$ das Aggregat der Glieder mit negativen Potenzen von $(s-c)$ in der Entwickelung des Bruches $S_{\beta\alpha} : S$, so kommt für den gegenwärtigen Zweck nur die Function $\frac{t^{u+v}}{t-s}(F(s) - F(t))$ in Betracht. Entwickelt man diese zuerst nach Potenzen von $s-c$, so erhält man

$$\left[\frac{F(s)}{t-s}\right]_{(s-c)^{-1}} = F(t), \qquad \left[\frac{F(t)}{t-s}\right]_{(s-c)^{-1}} = 0,$$

und hieraus weiter

$$\left[\frac{F(s)-F(t)}{t-s} t^{u+v}\right]_{(s-c)^{-1}(t-c)^{-1}} = [F(t)t^{u+v}]_{(t-c)^{-1}}.$$

Da dies für alle Werthe von c gilt, ergiebt sich sofort die Richtigkeit der Gleichung (1).

Der hiermit bewiesene Satz kann symbolisch durch die Formel

$$G(u+v) = G(u)G(v) = G(v)G(u) \tag{4}$$

ausgedrückt und als das *Additionstheorem der Substitution* $G(u)$ bezeichnet werden. Indem ich mir vorbehalte, an einem andern Orte weitere Folgerungen an dieses Theorem zu knüpfen, beschränke ich mich hier auf dasjenige, was zur Vervollständigung der in § 1 geleisteten Integration von unmittelbarer Bedeutung ist.

Setzt man $v = -u$, so wird $g_{\alpha\beta}(u+v) = e_{\alpha\beta}$, d. h.

Die Auflösung der Gleichungen

$$y_\alpha = \Sigma g_{\alpha\beta}(u)\eta_\beta$$

wird gegeben durch die Gleichungen

$$\eta_\alpha = \Sigma g_{\alpha\beta}(-u)y_\beta. \tag{5}$$

Vergleicht man diese Auflösung mit derjenigen, welche die Determinantentheorie unmittelbar liefert, so erkennt man, dass der Quotient aus der dem Elemente $g_{\alpha\beta}(u)$ adjungirten Unterdeterminante von $|g_{\alpha\beta}(u)| = |G(u)|$ und dieser Determinante selbst, gleich $g_{\beta\alpha}(-u)$ ist. Daraus folgt

$$\frac{d \log |G(u)|}{du} = \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta}(-u) \frac{dg_{\alpha\beta}(u)}{du}$$

$$= \mathbf{R}\,\mathbf{R}\, s^u \log s\, t^{-u} \sum_{\alpha,\beta} \frac{S_{\beta\alpha} T_{\alpha\beta}}{ST}.$$

Aber zufolge (2) ist

$$(s-t) \sum_{\alpha\beta} S_{\beta\alpha} T_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha} (ST_{\alpha\alpha} - TS_{\alpha\alpha}) = S\frac{dT}{dt} - T\frac{dS}{ds},$$

und daher

$$\frac{d \log |G(u)|}{du} = \mathbf{R}\,\mathbf{R}\, \frac{s^u \log s\, t^{-u}}{t-s} \left(\frac{d \log S}{ds} - \frac{d \log T}{dt} \right).$$

Durch ähnliche Schlüsse, wie sie oben angewendet wurden, ergiebt sich sodann, wenn

(6) $$S = \Pi(s-c)^l$$

gesetzt wird,

$$\frac{d \log |G(u)|}{du} = \Sigma l \log c.$$

Da ausserdem für $u = 0$ $G(u)$ auf E und daher $|G(u)|$ auf 1 sich reducirt, so erhält man schliesslich

(7) $$|G(u)| = \Pi e^{lu \log c} = |c_{\alpha\beta}|^u.$$

§ 3.

Die vollständige Entwicklung der Substitution (9) § 1 bietet zwar an sich keine Schwierigkeit dar; ist c eine $l$fache Wurzel der Gleichung $S = 0$, so wird derselben in jedem Substitutionscoefficienten ein Aggregat der Form $e^u(a_0 + a_1 u + \ldots a_{l-1} u^{l-1})$ entsprechen. Auch bemerkt man sogleich, dass die höchsten Potenzen von u innerhalb der Klammer wegfallen, wenn $s - c$ ein Factor der sämmtlichen Unterdeterminanten $S_{\beta\alpha}$ ist; aber doch würde man selbst in dem einfachen Falle, wenn S lauter einfache Factoren hat, den eigentlichen Bau der Substitution G nicht unmittelbar erkennen. Um diesen allgemein ersichtlich zu machen, bediene ich mich der Methode, welche Herr *Weierstrass* in § 2 der Abhandlung[1]) „Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen“ entwickelt hat, insbesondere der in der Formel (35) daselbst enthaltenen Partialbruchzerlegung der bilinearen Form $\Sigma \xi_\alpha \eta_\beta S_{\beta\alpha} : S$. Von der Einführung der bilinearen Formen, welche dort mit φ, ψ bezeichnet sind, werde ich Umgang nehmen, dagegen den Begriff der Elementartheiler aus § 1 entlehnen. Die von Herrn *Weierstrass* durch S, $S_{\beta\alpha}$ bezeichneten Functionen gehen genau in die hier gebrauchten über, wenn $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ durch $e_{\alpha\beta}$, $c_{\alpha\beta}$ ersetzt werden.

1) Monatsber. d. Akad. d. Wiss. zu Berlin, Jahr 1868, S. 314 ff.

Statt der linearen Functionen $y_\alpha = \sum_\beta g_{\alpha\beta}\eta_\beta$ betrachte man eine lineare Verbindung derselben:

$$(1) \qquad \Sigma \xi_\alpha y_\alpha = \Sigma g_{\alpha\beta}\xi_\alpha\eta_\beta = \mathbf{R}\, s^u \Sigma \frac{S_{\beta\alpha}}{S}\xi_\alpha\eta_\beta .$$

Dann kann man die eben erwähnte Partialbruchzerlegung anwenden:

$$(2) \qquad \Sigma \frac{S_{\beta\alpha}}{S}\xi_\alpha\eta_\beta = \sum_\varkappa \sum_{\lambda,\mu} \Xi_{\varkappa\lambda} H_{\varkappa\mu}(s-c_\varkappa)^{\lambda+\mu-\varepsilon_\varkappa} \qquad (\lambda+\mu<\varepsilon_\varkappa).$$

Hier sind für $(s-c_\varkappa)^{\varepsilon_\varkappa}$ der Reihe nach alle Elementartheiler von S zu setzen, deren Product gleich S ist; für einen bestimmten Werth von $\varkappa$ erhalten λ und μ die Werthe 0, 1, ... $(\varepsilon_\varkappa - 1)$ unabhängig von einander mit der oben angedeuteten Einschränkung; die Grössen $\Xi_{\varkappa\lambda}$ und $H_{\varkappa\mu}$ sind lineare homogene Functionen der Variabeln ξ_α, bez. η_β, und ihre Anzahl beträgt je $\Sigma\varepsilon_\varkappa = n$. Die Coefficienten dieser Functionen sind zwar nicht völlig bestimmt[1]), sollen aber hier als unveränderlich angesehen werden.

Indem man nun den Factor s^u in der Umgebung von $c_\varkappa$ vermittelst der binomischen Reihe nach Potenzen von $s-c_\varkappa$ entwickelt erhält man

$$\Sigma \xi_\alpha y_\alpha = \sum_\varkappa \Sigma \Xi_{\varkappa\lambda} H_{\varkappa\mu}\binom{u}{\nu} c_\varkappa^{u-\nu} \qquad (\lambda+\mu+\nu = \varepsilon_\varkappa - 1).$$

Diese Gleichung wird auf die Gestalt

$$(3) \qquad \Sigma \xi_\alpha y_\alpha = \sum_\varkappa \sum_\lambda \Xi_{\varkappa,\varepsilon_\varkappa-\lambda-1} Y_{\varkappa\lambda}$$

gebracht, wenn man

$$(4) \qquad Y_{\varkappa\lambda} = \Sigma \binom{u}{\nu} c_\varkappa^{u-\nu} H_{\varkappa,\lambda-\nu} \qquad (\nu = 0, \ldots \lambda)$$

setzt. Ist endlich

$$\Xi_{\varkappa,\varepsilon_\varkappa-\lambda-1} = \sum_\alpha a_{\alpha\varkappa\lambda}\xi_\alpha ,$$

$$(5) \qquad H_{\varkappa,\lambda} = \sum_\beta b_{\beta\varkappa\lambda}\eta_\beta ,$$

so ergiebt sich

$$(6) \qquad y_\alpha = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\alpha\varkappa\lambda} Y_{\varkappa\lambda}.$$

Somit ist die Substitution G aus dreien zusammengesetzt, die wir der Kürze halber durch A, $\Gamma(u)$, B bezeichnen; diese Zusammensetzung wird durch die Gleichung

$$(7) \qquad G = A\Gamma B$$

ausgedrückt. Zwischen den von u unabhängigen Substitutionen A, B

1) Vgl. hierzu *Darboux* in Liouville's Journal 1874, S. 378 ff. und meine Arbeit in Borchardt's Journal, Bd. 86, namentlich S. 23—26 und 33.

besteht aber noch eine einfache Beziehung[1]), die wir hier erhalten können, indem wir $u = 0$ setzen. Dann wird nach § 1 $G = E$ und nach Gleichung (4) $\Gamma = E$, und daher

$$E = AEB = AB, \qquad B = A^{-1}, \tag{8}$$

sowie

$$G = A\Gamma A^{-1}, \qquad \Gamma = A^{-1}GA. \tag{9}$$

An Stelle der Variabeln $y_1, \ldots y_n$ können n unabhängige lineare Verbindungen derselben $Y_{\varkappa\lambda}$ durch die Gleichungen

$$Y_{\varkappa\lambda} = \Sigma b_{\beta\varkappa\lambda} y_\beta \quad \text{oder} \quad y_\alpha = \Sigma a_{\alpha\varkappa\lambda} Y_{\varkappa\lambda}$$

eingeführt werden, welche mit den entsprechenden Functionen $H_{\varkappa\lambda}$ der Variabeln $\eta_1, \ldots \eta_n$ durch die Gleichungen

$$Y_{\varkappa,\lambda} = \Sigma \binom{u}{v} c_\varkappa^{u-v} H_{\varkappa,\lambda-v} \qquad (v = 0, 1, \ldots \lambda)$$

verbunden sind.

Die Substitution Γ ist in der Weise zerlegbar[2]), dass ihre einzelnen Theile den Elementartheilern von S entsprechen; denn diejenigen $\varepsilon_\varkappa$ Variabeln Y, welche den ersten Index $\varkappa$ tragen, sind nur durch die entsprechenden Veränderlichen H ausgedrückt. Die Elementartheiler der Determinante $|sE - \Gamma|$ und daher auch diejenigen von $|sE - G|$ sind $(s - c_1^{u_\varkappa})^{\varepsilon_\varkappa}, \ldots$.

Das Additionstheorem der Substitution $G(u)$ überträgt sich auch auf $\Gamma(u)$; denn es ist

$$\Gamma(u+v) = A^{-1}G(u+v)A = A^{-1}G(u)A \,.\, A^{-1}G(v)A$$

$$\Gamma(u+v) = \Gamma(u)\Gamma(v) = \Gamma(v)\Gamma(u). \tag{10}$$

Ist nun erstens v gleich einer ganzen positiven Zahl m, so erhält man den Satz:

Wird u um eine ganze positive Zahl m vermehrt, so geht die lineare Function $Y_{\varkappa\lambda}$ über in

$$c_\varkappa^m Y_{\varkappa,\lambda} + \binom{m}{1} c_\varkappa^{m-1} Y_{\varkappa,\lambda-1} + \ldots + \binom{m}{\lambda} c_\varkappa^{m-\lambda} Y_{\varkappa,0}.$$

Wird zweitens $v = -u$ gesetzt, so gelangt man zu dem Satze:

Die Auflösung der Gleichungen (4) ist in den Gleichungen

$$H_{\varkappa\lambda} = \Sigma \binom{-u}{v} c_\varkappa^{-u-v} Y_{\varkappa,\lambda-v}$$

enthalten.

1) *Weierstrass* a. a. O. S. 320.

2) *Frobenius* in Borchardt's Journal, Bd. 84, S. 17.

§ 4.

Indem wir die Ergebnisse der beiden ersten Paragraphen mit einander verbinden, erhalten wir den Satz:

I. *Die periodischen Functionen* $\varphi_1(u), \ldots \varphi_n(u)$, *welche nach* § 1 *in die allgemeinen Integrale der Differenzengleichungen* (3) *daselbst eingehen, lassen sich umgekehrt durch diese Integrale in der Form*

$$\varphi_\alpha(u) = \sum_\beta g_{\alpha\beta}(u_0 - u) f_\beta(u)$$

darstellen; sie haben daher für endliche Werthe von u *zugleich mit* $f_1(u), \ldots f_n(u)$ *den Charakter ganzer Functionen von* u.

Dass die durch diese Gleichungen oder durch die Gleichungen (12) § 1 definirten Functionen periodisch sind, kann man auch nachträglich durch die Bemerkung beweisen, dass die lineare Substitution, mittelst welcher $\varphi_1(u+1), \ldots \varphi_n(u+1)$ aus $\varphi_1(u), \ldots \varphi_n(u)$ gebildet werden, aus den drei Substitutionen $G(u_0 - u - 1)$, $G(1) = C$, $G(u - u_0)$ zusammengesetzt ist; das Resultat dieser Zusammensetzung ist aber nach § 2 gleich $G(0) = E$.

Für die Differenzen- und Differentialgleichungen ergiebt sich Folgendes:

II. *Ein System von linearen Differenzengleichungen mit constanten Coefficienten*

$$f_\alpha(u+1) = \sum_\beta c_{\alpha\beta} f_\beta(u), \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

kann unter der Voraussetzung, dass die Determinante $|c_{\alpha\beta}|$ *von Null verschieden ist, durch Einführung von* n *unabhängigen linearen Verbindungen der Functionen* f_α *in ein anderes transformirt werden, welches, entsprechend den Elementartheilern der Determinante der Schaar von bilinearen Formen* $s\sum x_\alpha y_\alpha - \sum c_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$, *in einfachere Systeme zerfällt. Einem Elementartheiler* $(s-c)^\varepsilon$ *entspricht nämlich ein System von Functionen* $F_0, \ldots F_{\varepsilon-1}$, *welche den Gleichungen*

(2) $\quad F_0(u+1) = cF_0(u), \qquad F_\lambda(u+1) = F_{\lambda-1}(u) + cF_\lambda(u)$

und allgemeiner den Gleichungen

$$F_\lambda(u+m) = c^m F_\lambda(u) + \binom{m}{1} c^{m-1} F_{\lambda-1}(u) + \ldots + \binom{m}{\lambda} c^{m-\lambda} F_0(u)$$

genügen. Die Gleichungen (2) *aber gehen durch die Substitution*

$$F_\lambda(u) = c^u \Phi_\lambda(u) + \binom{u}{1} c^{u-1} \Phi_{\lambda-1}(u) + \ldots + \binom{u}{\lambda} c^{u-\lambda} \Phi_0(u)$$

oder deren Umkehrung

$$\Phi_\lambda(u) = c^{-u} F_\lambda(u) + \binom{-u}{1} c^{-u-1} F_\lambda(u) + \ldots + \binom{-u}{\lambda} c^{-u-\lambda} F_0(u)$$

über in

$$\Phi_\lambda(u+1) = \Phi_\lambda(u).$$

III.[1] *Wenn die Coefficienten einer linearen homogenen Differentialgleichung in der Umgebung eines Werthes x_0 der unabhängigen Veränderlichen x eindeutig, aber nicht holomorph sind, dann kann man ein System von n unabhängigen Integralen finden, welche so in Gruppen zerfallen dass die einer Gruppe angehörigen $Y_0, Y_1, \ldots Y_{\varepsilon-1}$ bei einmaliger Umkreisung von x_0 der Reihe nach in $cY_0, Y_0 + cY_1, \ldots Y_{\varepsilon-2} + cY_{\varepsilon-1}$ übergehen. Setzt man dann*

$$x - x_0 = e^{2u\pi i}, \qquad c = e^{2r\pi i},$$

so sind die Functionen

$$H_\lambda = (x - x_0)^{-r} \sum_{\nu=0}^{\nu=\lambda} \binom{-u}{\nu} c^{-\nu} Y_{\lambda-\nu}$$

in der Umgebung jenes singulären Punktes eindeutig, und man hat umgekehrt

$$Y_\lambda = (x - x_0)^r \sum_{\nu=0}^{\nu=\lambda} \binom{u}{\nu} c^{-\nu} H_{\lambda-\nu}.$$

Dass diese Gruppen von Integralen den Elementartheilern der *Fuchs*'schen Fundamentalgleichung entsprechen, geht aus der Deduction in § 3 hervor. Im nächsten Paragraphen werden nach dem Vorgang von Herrn *Fuchs* alle diejenigen Gruppen, für welche die Constante c denselben Werth hat, zusammen untersucht und nach einem andern Princip classificirt.

§ 5.

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf die specielle Classe linearer Differentialgleichungen, deren Integrale in der Umgebung des Werthes $x = 0$, nachdem sie mit passenden Potenzen von x multiplicirt sind, sämmtlich endlich bleiben. Nach § 4, I kommt dieselbe Eigenschaft auch den eindeutigen Functionen $\varphi(x)$ zu, welche in den Ausdrücken der Integrale vorkommen. Daher hat jedes Integral eine bestimmte Ordnungszahl (nach *Cauchy*'s Definition), welche Herr *Fuchs* den Exponenten nennt, zu dem das Integral gehört. Die Beschaffenheit der Coefficienten einer solchen Differentialgleichung in der Nähe des Nullpunktes leitet Herr *Fuchs* aus dem Satze[2]) ab, dass die aus den Functionen $y_1, \ldots y_n$ und ihren $n - 1$ ersten Derivirten gebildete Determinante wirklich von der Ordnung $r_1 + \ldots + r_n - \frac{n(n-1)}{2}$ ist, wenn $y_1, \ldots y_n$ ein zum singulären Werthe $x = 0$ gehöriges Fundamentalsystem bilden und ihre Ordnungszahlen $r_1, \ldots r_n$ sind. Der

1) Dieser Satz gehört im Wesentlichen Herrn *Hamburger* an.

2) A. a. O. S. 144.

Beweis dieses Satzes ist insofern nicht ganz genügend, als die successive eingeführten Functionen z_1, u_1 ... unter Umständen von höherer Ordnung sein können. In der That zeigt sich leicht, dass die Ordnung von $z_1 = \frac{d}{dx}\frac{y_2}{y_1}$ stets dann höher ist als $r_2 - r_1 - 1$, wenn $\frac{y_2}{y_1}$ von Logarithmen frei ist und für $x = 0$ endlich und von Null verschieden bleibt[1]). Soll also der erwähnte Satz Giltigkeit haben, so muss das Fundamentalsystem, auf welches er sich bezieht, so gewählt sein, dass eine Erhöhung der Ordnung nicht eintritt. Dass dies immer möglich ist, zeigen die folgenden Betrachtungen[1]).

Seien $y_1, \ldots y_l$ diejenigen Integrale eines Fundamentalsystems, welche zu einer $l$fachen Wurzel $c = e^{2r\pi i}$ der Fundamentalgleichungen gehören und daher auf die Form

$$x^r(\varphi_0(x) + \varphi_1(x)\log x + \ldots + \varphi_{\lambda-1}(x)(\log x)^{\lambda-1})$$

gebracht werden können, in der $\varphi_0, \ldots \varphi_{\lambda-1}$ eindeutige Functionen von x sind. Die Grösse r sei so gewählt, dass diese $l\lambda$ Functionen für $x = 0$ zwar nicht unendlich gross werden, aber auch nicht sämmtlich verschwinden. Irgend eine lineare Verbindung $C_1y_1 + \ldots + C_ly_l$ wird also im Allgemeinen zum Exponenten r gehören; damit sie von einer höheren Ordnung sei, haben die Coefficienten $C_1, \ldots C_l$ λ linearen homogenen Gleichungen zu genügen, indem die Coefficienten von x^r, $x^r \log x$, ... $x^r(\log x)^{\lambda-1}$ verschwinden müssen. Ist α der Rang dieser linearen Gleichungen, so giebt es $l - \alpha$ unabhängige Verbindungen der Integrale $y_1, \ldots y_l$, welche zu einem höheren Exponenten als r gehören; der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $y_{\alpha+1}, \ldots y_l$ diese Verbindungen seien. Unter dieser Voraussetzung ist also das Integral $C_1y_1 + \ldots + C_ly_l$ nur dann von höherer als der $r$ten Ordnung, wenn $C_1 = 0, \ldots C_\alpha = 0$; es möge dann, wenn $C_{\alpha+1}, \ldots$ beliebig sind, von der Ordnung r' sein. Damit die Ordnung noch höher sei, müssen wiederum λ Gleichungen erfüllt sein, deren Rang β sei; man kann annehmen, dass nur $y_{\alpha+\beta+1}, \ldots y_l$ und deren Verbindungen von höherer Ordnung sind. Fährt man so fort, so kommt man zu dem Satze:

Die zu einer $l$fachen Wurzel der Fundamentalgleichung gehörigen l Integrale einer Differentialgleichung können, wenn sie regulär sind, so ausgewählt werden, dass in keiner linearen Verbindung derselben die Glieder niedrigster Ordnung sich wegheben.

Wenn n Integrale so gewählt sind, dass diese Bedingung für jede

---

1) Vgl. die Bemerkung des Herrn *Fuchs* S. 155 unter I, 1.

Wurzel der Fundamentalgleichung erfüllt ist, so sagen wir, dieselben bilden ein *reducirtes* System.

Wenn in einem reducirten Systeme genau α Integrale von der Ordnung r vorkommen, so sind die Glieder $r$ter Ordnung in denselben r unabhängige lineare Functionen von x^r, $x^r \log x$, ... $x^r (\log x)^{\alpha-1}$ mit constanten Coefficienten.

Denn zunächst müssen die Coefficienten der höheren Potenzen von $\log x$ als der $(\alpha - 1)$ten Functionen höherer Ordnung sein, weil sonst mehr als α Integrale der Ordnung r vorhanden wären[1]); die Glieder $r$ter Ordnung sind also nur lineare Verbindungen der oben angegebenen Functionen; wären aber die Verbindungen nicht unabhängig, so könnte man eine lineare Function der α Integrale bilden, welche gar keine Glieder $r$ter Ordnung enthält; das System wäre also nicht reducirt. Wir werden in der Folge annehmen, dass die Glieder $r$ter Ordnung geradezu x^r, $x^r \log x$, ... $x^r (\log x)^{\alpha-1}$ seien.

Im Folgenden bezeichne ich nach dem Vorgange des Herrn *Frobenius* durch $D(y_1, \ldots y_n)$ die Determinante $n$ten Grades

$$D(y_1, y_2 \ldots y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \ldots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \ldots & y_2^{(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n & y_n' & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Die Bestimmung des Anfangsgliedes in der Determinante eines reducirten Fundamentalsystems wird durch den Satz gegeben:

Sind r_1, r_2, ... r_ν verschiedene Grössen, α_1, α_2, ... α_ν ganze positive Zahlen, deren Summe n ist, und

$$z_{\alpha_1+\ldots+\alpha_{\mu-1}+\lambda} = \frac{1}{(\lambda-1)!} x^{r_\mu} (\log x)^{\lambda-1} = [x^r]_{(r-r_\mu)^{\lambda-1}} \quad (0 < \lambda \leqq \alpha_\mu),$$

dann ist

$$D(z_1, z_2, \ldots z_n) = \Pi(r_\lambda - r_\varkappa)^{\alpha_\varkappa \alpha_\lambda} x^{\alpha_1 r_1 + \ldots + \alpha_\nu r_\nu - \frac{n(n-1)}{2}},$$

wenn das Product rechter Hand auf alle Combinationen $\varkappa$, λ der Zahlen 1, 2, ... ν ausgedehnt wird, in denen $\varkappa < \lambda$ ist.

Um diesen Satz zu beweisen, gehe man aus von der Formel des Herrn *Thomé*[2])

$$D(x^{\varrho_1}, x^{\varrho_2} \ldots x^{\varrho_n}) = \Pi(\varrho_\lambda - \varrho_\varkappa) x^{\varrho_1 + \ldots + \varrho_n - \frac{n(n-1)}{2}}.$$

Man setze erst $\varrho_1 = r_1$, dann $\varrho_2 = r_1 + h$, entwickele nach Potenzen

1) *Hamburger* in Borchardt's Journal Bd. 76, S. 122.

2) Borchardt's Journal Bd. 74, S. 205.

von h und behalte nur das Glied mit h^1 bei. Dann setze man (falls $\alpha_1 > 2$ ist) $\varrho_3 = r_1 + h$ und verfahre ähnlich u. s. w. Auch kann man den Grenzübergang in der Weise ausführen, wie in Borchardt's Journal Bd. 83, S. 175 geschehen ist.

Bilden nun $y_1, y_2 \ldots y_n$ ein reducirtes System von Integralen der Gleichung $n$ter Ordnung, so kann diese auf die Form

$$P(y) = \frac{D(y_1 \ldots y_n, y)}{D(y_1 \ldots y_n)} = 0$$

gebracht werden. Sind ferner $z_1, z_2, \ldots z_n$ die Anfangsglieder von $y_1, y_2 \ldots y_n$, wie man nach den vorhergehenden Erörterungen voraussetzen darf, und setzt man überdies $y = x^r$, wo r unbestimmt gelassen wird, so sind die Anfangsglieder der Entwickelungen des Zählers und Nenners von $P(x^r)$ durch den letzten Satz bestimmt, und man erhält sofort

$$P(x^r) = (r - r_1)^{\alpha_1} \ldots (r - r_\nu)^{\alpha_\nu} x^{r-n} + \ldots .$$

Hieraus folgt aber unmittelbar der Satz des Herrn *Fuchs:*

Wenn die Coefficienten der Differentialgleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0$$

in der Umgebung des Nullpunktes eindeutig bleiben und ihre sämmtlichen Integrale regulär sind, wenn ferner in einem reducirten System von Integralen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ solche vorkommen, deren Ordnungen resp. $r_1, r_2, \ldots$ sind, dann bleiben die Producte $xp_1, x^2p_2, \ldots x^n p_n$ für $x = 0$ endlich, und wenn durch $a_1, a_2, \ldots a_n$ ihre Werthe an dieser Stelle bezeichnet werden, so gilt die identische Gleichung

$$r(r-1)\ldots(r-n+1) + a_1 r(r-1)\ldots(r-n+2) + \ldots + a_n = (r-r_1)^{\alpha_1}(r-r_2)^{\alpha_2}\ldots .$$